

“EMPASOFT” ТЕХНОЛОГИЙН СУРГУУЛИЙН НЭРМЖИТ МАТЕМАТИКИЙН

АНХДУГААР ОЛИМПИАД 2024.04.27

12-Р АНГИ (II ШАТ)

Бодлого бүр 6 оноо

Хугацаа 120 минут

Бодлого, оноо өгөх зөвлөмж

Бодлого XII-1. $\int_0^a (2 - 4x + 3x^2) dx \leq a$ тэнцэтгэл бишийг хангах бүх эерэг a -тоог ол.

Бодолт, оноо тавих заавар:

- Интегралын эх функцийг $2x - 2x^2 + x^3$ гэж зөв олоход- **1 оноо**
- Хилүүдийг орлуулан интеграл нь $a^3 - 2a^2 + 2a$ гэдгийг харуулахад – **1 оноо**
- Үүссэн $a^3 - 2a^2 + 2a \leq a$ илэрхийллийг хувирган $a(a-1)^2 \leq 0$ гэдгийг харуулбал -**1 оноо**
- Энэ тэнцэтгэл бишийн шийд нь $a \leq 0$ эсвэл $a = 1$ гэдгийг харуулахад – **2 оноо** /тус бүр 1 оноо/
- a эерэг тоо гэдгээс анхны тэнцэтгэл бишийн шийд нь $a = 1$ гэж хэлэхэд-**1 оноо**

Бодлого XII-2. Координатын хавтгай дээр $2|x| + |y + 2x + 1| \leq 5$ нөхцлийг хангах цэгүүдээр үүсгэгдэх дүрсийн талбайг ол.

Бодолт, оноо тавих заавар:

- $\begin{cases} x \geq 0 \\ y + 2x + 1 \geq 0 \\ 2x + y + 2x + 1 \leq 5 \end{cases}$ тохиолдлыг бичиж, шийдийн олонлогийг хавтгайд зөв дүрсэлбэл– **1 оноо**
- $\begin{cases} x \geq 0 \\ y + 2x + 1 < 0 \\ 2x - y - 2x - 1 \leq 5 \end{cases}$ тохиолдлыг бичиж, шийдийн олонлогийг хавтгайд зөв дүрсэлбэл– **1 оноо**
- $\begin{cases} x < 0 \\ y + 2x + 1 \geq 0 \\ -2x + y + 2x + 1 \leq 5 \end{cases}$ тохиолдлыг бичиж, шийдийн олонлогийг хавтгайд зөв дүрсэлбэл– **1 оноо**
- $\begin{cases} x < 0 \\ y + 2x + 1 < 0 \\ -2x - y - 2x - 1 \leq 5 \end{cases}$ тохиолдлыг бичиж, шийдийн олонлогийг хавтгайд зөв дүрсэлбэл– **1 оноо**
- Тус бүрийн шийдийг нэг хавтгайд зөв дүрслэхэд - **1 оноо**
- Үүссэн дүрсийн талбайг шулууны тэгшитгэлийн тусламжтайгаар 25 гэж гаргавал-**1 оноо**

БодлогоХII-3. $2p$ -периметр бүхий ABC гурвалжны $|AC|=a$ ба $\sphericalangle ABC=\alpha$ байг. Хэрэв O -нь энэ гурвалжинд багтсан тойргийн төв бол AOC гурвалжны талбайг ол.

Бодолт, оноо тавих заавар: Багтсан тойргийн BC -талтай шүргэлцэх цэгийг K -гэе.

- Нэг цэгээс татсан шүргэгчүүд тэнцүү гэдгээс $BK = p - a$ гэж харуулсан бол- **2 оноо**

- $\sphericalangle OBK = \frac{\alpha}{2}$ ба OBK -нь тэгш өнцөгт гурвалжин гэж хэлсэн бол – **1 оноо** /тус бүр 0.5 оноо/

- OBK -нь тэгш өнцөгт гурвалжнаас $r = OK = (p - a) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ гэдгийг харуулбал -**2 оноо**

- AOC гурвалжны талбай нь $S = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot r = \frac{1}{2} a \cdot (p - a) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ гэж бичвэл -**1 оноо**

БодлогоХII-4. Суудлын галт тэрэг А ба В хоёр хотын хоорондох зайг ачааны налт тэрэгнээс 4 цагаар хурдан туулна. Хэрэв нэгнийхээ хоёр хотын хоорондох зайг туулах хугацаанд нөгөө галт тэрэг нь өөрийн хурдаар явбал суудлын галт тэрэг ачааны галт тэрэгнээс 280 км зам илүү туулна. Хэрэв галт тэрэг бүрийн хурдыг 10 км/цаг-аар нэмэгдүүлбэл суудлын галт тэрэг 2 хотын хоорондох зайг ачааны галт тэрэгнээс 2 цаг 24 минутаар хурдан явна. Тэгвэл хоёр хотын хоорондох зайг ол.

Бодолт, оноо тавих заавар: $|AB|=S$, ачааны галт тэрэгний хурд- x , суудлынх- y гэе. $x < y$ байна.

- Эхний нөхцлөөс $\frac{S}{x} - \frac{S}{y} = 4$ гэсэн бол- **1 оноо**

- Хоёр дахь нөхцлөөс $y \cdot \frac{S}{x} - x \cdot \frac{S}{y} = 280$ гэсэн бол – **1 оноо**

- Гурав дахь нөхцлөөс $\frac{S}{x+1} - \frac{S}{y+10} = 2\frac{2}{5}$ гэсэн бол -**1 оноо**

- Ижил хуваарь өгч эмхэтгээд
$$\begin{cases} S(y-x) = 4xy \\ S(y^2 - x^2) = 280xy \\ 5S(y-x) = 12(xy + 10(x+y) + 100) \end{cases}$$
 систем бичвэл -**1 оноо**

- Эхний 2 тэгшитгэлээс $x + y = 70$, харин 1-р тэгшитгэлийг 5-аар үржүүлж 3-р тэгшитгэлээс хасаад

$xy = 1200$ гэдгийг гаргавал -**1 оноо** /тус бүр 0.5 оноо/

- $\begin{cases} x + y = 70 \\ xy = 1200 \end{cases}$ системээс $x = 30$, $y = 40$ гэж олоод эндээс $S = 480$ гэж олбол- **1 оноо**